(1) Forma más sencilla de ver que $Z, Q$ son numerables

 Para $Z$ podemos definir la aplicación

 $f: N→Z$

 Se define

Para $n\in N$ par definimos $f\left(n\right)≔-\frac{n}{2}$ (con esto tenemos como imágenes todos los enteros negativos)

Para $n\in N$ impar definimos $f\left(n\right)≔\frac{n+1}{2}$ (con esto tenemos como imágenes todos los enteros positivos)

Puede probarse que es biyección

Para $Q$ tenemos que $Q=Q^{+}∪Q^{-}$

 Veamos que $Q^{+}$ es numerable

 Tenemos que la aplicación $g: N×(N-\left\{0\right\})→Q^{+}$ definida por

 $g\left(n,m\right)≔\frac{n}{m}$ es una biyección

 Como $N×\left(N-\left\{0\right\}\right)$ es numerable por serlo $N$ y $N-\left\{0\right\}$ entonces $Q^{+}$ es numerable

 Como $Q^{-}$ es igual que $Q^{+}$ cambiando sus elementos de signo entonces $Q^{-}$ es numerable

 Por tanto $Q=Q^{+}∪Q^{-}$ es numerable por ser unión de conjuntos numerables

(2) Biyección entre $I$ y $I×I$ siendo $I=(0,1)$

 Esta biyección lo construyó Cantor es sencilla a partir de las expresiones decimales

Se define

 $f:I×I→I$ del siguiente modo

Dados $x,y\in I$ sacamos su expresión decimal (que puede ser infinita)

 $x=0,a\_{1}a\_{2}a\_{3}…a\_{n}…$

 $y=0,b\_{1}b\_{2}b\_{3}…b\_{n}…$

Y definimos $f\left(x,y\right):=0,a\_{1}b\_{1}a\_{2}b\_{2}a\_{3}b\_{3}…a\_{n}b\_{n}…$

 Puede verse que es biyección

(3) Te paso aquí una prueba poco rigurosa pero intuitiva del teorema diagonal de Cantor que demuestra que $R$ no es biyectivo con $N$

Lo hacemos por reducción al absurdo

 Supongamos que sí que existiera una biyección entre $N$ y $R$ entonces existiría una biyección entre $N$ y $(0,1)$ pues el intervalo es biyectivo a $R$

 Entonces tendríamos que todos los números del intervalo $(0,1)$ serían una sucesión $\left\{x\_{n}\right\}$ y podríamos expresar cada uno en su forma decimal, tendríamos que todos los elementos del intervalo son:

 $x\_{1}=0.a\_{11}a\_{12}a\_{13}…a\_{1n}…$

 $x\_{2}=0.a\_{21}a\_{22}a\_{23}…a\_{2n}…$

 $……………………………$

 $x\_{n}=0.a\_{n1}a\_{n2}a\_{n3}…a\_{nn}…$

 $……………………………$

Sin embargo existiría el número en el intervalo $(0,1)$ que no está entre los descritos,

 $y :=0.b\_{1}b\_{2}b\_{3}…b\_{n}…$

 Definiendo $b\_{i}≔\left\{\begin{matrix}5&si a\_{ii}\in \left\{0,1,2,3,4\right\}\\3&si a\_{ii}\in \left\{5,6,7,8,9\right\}\end{matrix}\right.$

De este modo se tiene que si bien $y\in (0,1)$ el número $y$ es distinto de todos los $x\_{1},x\_{2},…,x\_{n},…$

Efectivamente es distinto de todos pues:

 $y$ es distinto de $x\_{1}$ pues el decimal $b\_{1}\ne a\_{11}$

 $y$ es distinto de $x\_{2}$ pues el decimal $b\_{2}\ne a\_{22}$

 $……………………………$

 $y$ es distinto de $x\_{n}$ pues el decimal $b\_{n}\ne a\_{nn}$

 $……………………………$

Esto es una contradicción pues decíamos que todos debía estar entre los $\left\{x\_{n}\right\}$

La contradicción proviene de suponer que $(0,1)$ es numerable, por tanto $(0,1)$ no es numerable y como consecuencia $R$ tampoco lo es