(1) Forma más sencilla de ver que son numerables

Para podemos definir la aplicación

Se define

Para par definimos (con esto tenemos como imágenes todos los enteros negativos)

Para impar definimos (con esto tenemos como imágenes todos los enteros positivos)

Puede probarse que es biyección

Para tenemos que

Veamos que es numerable

Tenemos que la aplicación definida por

es una biyección

Como es numerable por serlo y entonces es numerable

Como es igual que cambiando sus elementos de signo entonces es numerable

Por tanto es numerable por ser unión de conjuntos numerables

(2) Biyección entre y siendo

Esta biyección lo construyó Cantor es sencilla a partir de las expresiones decimales

Se define

del siguiente modo

Dados sacamos su expresión decimal (que puede ser infinita)

Y definimos

Puede verse que es biyección

(3) Te paso aquí una prueba poco rigurosa pero intuitiva del teorema diagonal de Cantor que demuestra que no es biyectivo con

Lo hacemos por reducción al absurdo

Supongamos que sí que existiera una biyección entre y entonces existiría una biyección entre y pues el intervalo es biyectivo a

Entonces tendríamos que todos los números del intervalo serían una sucesión y podríamos expresar cada uno en su forma decimal, tendríamos que todos los elementos del intervalo son:

Sin embargo existiría el número en el intervalo que no está entre los descritos,

Definiendo

De este modo se tiene que si bien el número es distinto de todos los

Efectivamente es distinto de todos pues:

es distinto de pues el decimal

es distinto de pues el decimal

es distinto de pues el decimal

Esto es una contradicción pues decíamos que todos debía estar entre los

La contradicción proviene de suponer que es numerable, por tanto no es numerable y como consecuencia tampoco lo es